ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN THỊ HẢI NINH

PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TƯƠNG ĐỐI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN THỊ HẢI NINH

PHƯƠNG PHÁP LẶP TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TƯƠNG ĐỐI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **8460112**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Song Hà

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của T.S Nguyễn Song Hà. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Thầy T.S Nguyễn Song Hà (Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên), Thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý Thầy, Cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp Cao học Toán K12A3, các bạn học viên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các Thầy Cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Tác giả

Đoàn Thị Hải Ninh

Mục lục

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

E	Không gian Banach thực
E^*	Không gian đối ngẫu của E
E^{**}	Không gian đối ngẫu thứ hai của E
$P_C(x)$	Phép chiếu mêtric phần tử x lên tập C
$\Pi_C(x)$	Phép chiếu suy rộng phần tử x lên tập C
$\mathrm{Fix}(T)$	Tập điểm bất động của ánh xạ T
$x_n \to x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x
$x_n \rightharpoonup x$	Dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x
$\|x\|$	Chuẩn của phần tử x
$\langle x^*, x\rangle$	Giá trị của $x^* \in E^*$ tại $x \in E$
J	Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E
I	Ánh xạ đơn vị của E
S_E	Mặt cầu đơn vị của E
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	Giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}$
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	Giới hạn trên của dãy $\{x_n\}$

Danh sách bảng

Mở đầu

Luizen Egbertus Jan Brouwer, nhà Toán học người BaLan, là người đặt nền móng cho những nghiên cứu về lí thuyết điểm bất động. Kết quả quan trọng đầu tiên, "Nguyên lí điểm bất động Brouwer" được ông công bố năm 1912. Đó là định lý trung tâm của lý thuyết điểm bất động và cũng là một trong những nguyên lý cơ bản của giải tích phi tuyến. Ngày nay đã có ít nhất năm cách chứng minh khác nhau cho nguyên lý nổi tiếng này và hàng chục định lý tương đương đã được tìm ra.

Trong suốt hơn 100 năm qua, lí thuyết này đã dành được sự quan tâm đặc biệt và gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà Toán học lớn như E. Picard, L.E.J. Brouwer, S. Banach, J. Schauder, S. Kakutani, A.N. Tikhonov, Ky Fan, F.E. Browder, K. Goebel, W.A. Kirk, ... Nó đóng vai trò then chốt trong nhiều nghiên cứu thuộc các lĩnh vực lí thuyết Toán học khác nhau như: lí thuyết tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng, bài toán minimax, phương trình vi tích phân, phương trình đạo hàm riêng,... Bên cạnh đó, lí thuyết này cũng là một công cụ hữu hiệu để giải quyết nhiều mô hình bài toán thực tiễn như: kiểm soát năng lượng trong hệ thống mạng viễn thông CDMA, xử lí ảnh, xử lí tín hiệu, mạng giao thông, y sinh, ...

Mục đích chính của luận văn này là trình bày lại có hệ thống về một số phương pháp lặp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn tương đối trên các không gian Banach lồi đều và trơn đều.

Với mục tiêu như vậy, ngoài lời mở đầu, luận văn gồm có hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo. Chương 1, chúng tôi dành để hệ thống lại những kiến thức cơ bản về cấu trúc hình học không gian Banach, ánh xạ không giãn tương đối và phép chiếu suy rộng, nhằm phục vụ cho việc cụ thể hóa nội dung chính ở chương sau của luận văn. Chương 2 dùng để trình bày phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp lặp Halpern-Mann tìm điểm bất động của bài toán nêu trên cùng các ví dụ số minh họa.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi hệ thống lại một số kiến thức cơ bản nhằm phục vụ cho việc trình bày các nội dung chính ở phần sau của luận văn. Cấu trúc của chương được chia thành ba phần: Mục 1.1 trình bày lại một số khái niệm và kết quả cơ bản về cấu trúc hình học không gian Banach. Những tính chất cần thiết về ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được cụ thể hóa trong Mục 1.2. Phần cuối chương, Mục 1.3 dành để giới thiệu lớp ánh xạ không giãn tương đối cùng phép chiếu suy rộng trên không gian Banach.

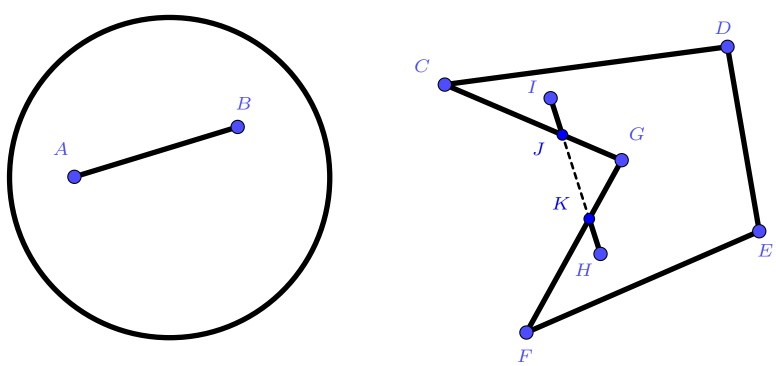
1.1. Cấu trúc hình học không gian Banach

Cho E là không gian Banach thực, E^* và E^{**} tương ứng là không gian đối ngẫu và không gian đối ngẫu thứ hai của E.

Định nghĩa 1.1. Tập $C \subseteq E$ được gọi là lồi nếu với mọi $x, y \in C$ và với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Hay nói cách khác, tập $C \subseteq E$ là lồi nếu nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì thuộc nó.



Hình 1.1. *Tập lồi và tập không lồi*

(Quan sát hình bên tay phải, ta thấy là tập không lồi vì đoạn nối hai điểm I và H có chứa phần JK không nằm trong tập đó).

Ví dụ 1.1. Những ví dụ đơn giản về tập lồi là các nửa không gian đóng hoặc hình cầu đóng. Dạng biểu diễn giải tích của các tập hợp này lần lượt là:

$$\Delta := \{x \in E : \langle x^*, x\rangle \leq \alpha\},$$

$$S[x_0, r] := \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\},$$

trong đó, $x^* \in E^*$, $x_0 \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ và số thực $r > 0$ cố định đã cho.

Định nghĩa 1.2. Dãy $\{x_k\} \subset E$ được gọi là
i) hội tụ mạnh tới $x_0 \in E$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0,$$

và khi ấy ta kí hiệu là $x_k \to x_0$.
ii) hội tụ yếu tới $x_0 \in E$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, x^*\rangle = \langle x_0, x^*\rangle \quad \forall x^* \in E^*,$$

và khi ấy ta kí hiệu là $x_k \rightharpoonup x_0$.

Nhận xét 1.1. Nếu dãy $\{x_k\} \subset E$ hội tụ mạnh tới $x_0 \in E$ thì nó hội tụ yếu tới $x_0 \in E$. Khẳng định ngược lại là đúng nếu E là không gian hữu hạn chiều.

Ví dụ 1.2. Dưới đây là một ví dụ về một dãy hội tụ yếu nhưng không hội tụ mạnh. Xét $E = l^2$ và $\{x_k\}$ là một dãy trong l^2 xác định bởi

$$x_k = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \quad k \in \mathbb{N},$$

trong đó các thành phần đều bằng 0 trừ ra thành phần bằng 1 ở vị trí thứ k tương ứng. Trước hết, để ý rằng $E^* = l^2$ và $\forall x^* = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots) \in l^2$ ta có

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_k, x^*\rangle = \lim_{k\to\infty} y_k = 0.$$

Do đó, $x_k \rightharpoonup 0$ khi $k \to \infty$. Tuy nhiên, $\{x_k\}$ không hội tụ mạnh bởi vì $\|x_k\| = 1$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Nhận xét 1.2. Trong không gian Hilbert, nếu dãy $\{x_k\}$ thỏa mãn $x_k \rightharpoonup x_0$ và $\|x_k\| \to \|x_0\|$ khi $k \to \infty$ thì $x_k \to x_0$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\|x_k - x_0\|^2 &= \langle x_k - x_0, x_k - x_0\rangle \\ &= \|x_k\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x_k, x_0\rangle.\end{aligned}$$

Cho $k \to \infty$ ta nhận được $\|x_k - x_0\| \to 0$.

Mệnh đề 1.1. [1, 3]

Cho E là một không gian Banach thực và $\{x_k\} \subset E$. Khi đó, nếu $x_k \rightharpoonup x_0$ thì $\{x_k\}$ bị chặn và

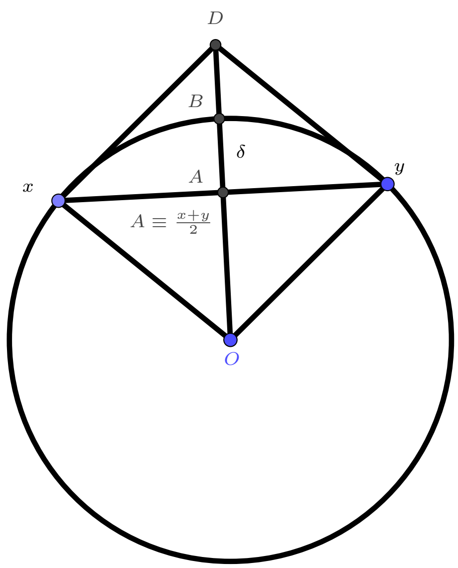
$$\|x_0\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|.$$

Định nghĩa 1.3. Tập $C \subseteq E$ được gọi là đóng nếu với mọi dãy $\{x_k\}$ trong C mà $x_k \to x_0$ thì $x_0 \in C$.

Những vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach trong phần tiếp theo được tham khảo chủ yếu ở các tài liệu [1, 3].

Định nghĩa 1.4. Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $0 < \varepsilon \leq 2$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon$ thỏa mãn thì tồn tại một số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho

$$\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta.$$



Hình 1.2. *Minh họa hình cầu đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^2$ lồi đều.*

Ví dụ 1.3. Không gian Hilbert H là không gian lồi đều. Thật vậy, từ quy tắc hình bình hành trên không gian Hilbert, ta có

$$\|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in H.$$

Giả sử với mọi $0 < \varepsilon \leq 2$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon$ thỏa mãn. Khi đó, ta nhận được

$$\|x+y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2.$$